Géométrie d'images multiples

Bill Triggs

MOVI

INRIA Rhône-Alpes

Motivation, Applications

Extraire de l'information 3D des images multiples

1. Mesure 3D pour l'industrie, la santé
2. Reconstruction des modèles 3D d'objets et de scènes
3. Réalité virtuelle et augmenté, synthèse de nouvelles vues

Notre orientation

- Une orientation théorique de base, « géométrie pure et dur »
- Formules et algorithmes, pas d'élaboration de système, pas de jolies images

Challenges théoriques

- Méthodes de reconstruction plus flexibles — réduire l'information / calibrage préalable, extraire le maximum des données.
- Mieux comprendre la structure géométrique des images multiples

Plan d'exposé

1. Introduction
2. L'approche tensorielle à la vision projective
3. La reconstruction projective
4. L'auto-calibrage d'une caméra en mouvement
5. Bilan des contributions

Représentation euclidienne homogène

$\mathsf{x} = \left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$	point 3D
$\mathsf{d} = \mathsf{x} - \mathsf{y} = \left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{d} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$	vecteur de déplacement/direction 3D
$\mathsf{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}^\top & d \end{pmatrix}$	plan 3D : $\mathsf{p} \cdot \mathsf{x} = 0$ si x est sur p
$\mathsf{T} = \left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{smallmatrix}\right)$	déplacement rigide
$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$	point 2D / image

- Toute transformation euclidienne (ou projective ...) est représentée par une simple multiplication matricielle.
- Les lois de transformation de vecteurs « point » et « direction » sont unifiées.

Modèle de caméra sténopée

• Une caméra perspective est paramétrée par sa matrice de projection 3×4 :

$\mathsf{P} = \boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t}\end{pmatrix}$	matrice de projection
$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}$	position et orientation 3D de la caméra
$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1 & s & u_0 \\ 0 & a & v_0 \\ 0 & 0 & 1/f \end{pmatrix}$	matrice de calibrage interne
$f, (u_0, v_0)$	focale, point principal
a, s	rapport des échelles, *skew* $(s \approx 0)$

• Toute matrice 3×4 peut être décomposée en ce forme (à une facteur d'échelle près)

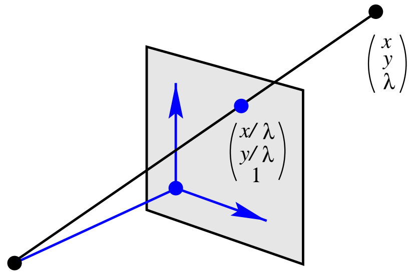
• C'est un modèle maniable, mais un peu simplifié — la distorsion optique n'est pas modélisée.

• Tout point le long du même rayon optique projette au même point image.

• La **profondeur** λ — mesure de la distance le long du rayon — est perdue pendant la projection.

• La retrouver correspond à la reconstruction du point 3D dans le repère caméra ...

Projection perspective



• Un point 3D est projeté dans une image par multiplication par la matrice de projection, puis renormalisation d'échelle :

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x/\lambda \\ y/\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \mathsf{P}\,\mathsf{x}$$

Structure 3D projective

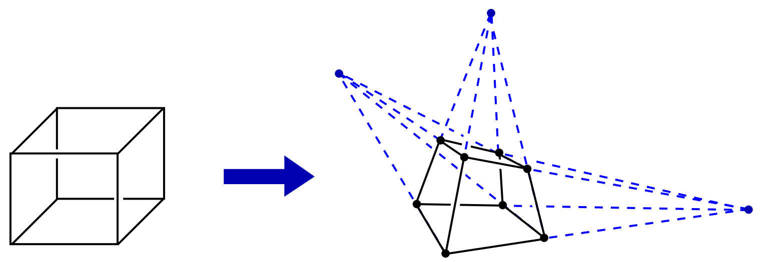
• Une ***transformation 3D projective*** de la scène est représenté par une matrice 4×4 non-singulière H

$$\mathsf{x} \longrightarrow \mathsf{x}' \simeq \mathsf{H}\,\mathsf{x} \qquad \mathsf{P} \longrightarrow \mathsf{P}' \simeq \mathsf{P}\,\mathsf{H}^{-1}$$

• "$\simeq$" dénote égalité à une échelle près, de tels vecteurs homogènes sont vus comme équivalents.

• Les transformations projectives préservent les structures linéaires et d'incidence.

• Les distances, les angles, et la distinction entre vecteurs de déplacement et points finis ne sont *pas* préservés



L'approche tensorielle à la vision projective

Pourquoi la reconstruction projective ?

• Une transformation projective 3D H ne change pas les images :

$$\boxed{\mathrm{P}\,\mathrm{x} \;=\; (\mathrm{P}\,\mathrm{H}^{-1})\,(\mathrm{H}\,\mathrm{x})}$$

• Donc une reconstruction visuelle à partir d'images perspectives non-calibrées est toujours ambiguë jusqu'à (au moins) une projectivité 3D près.

• On décompose le problème de reconstruction 3D en deux étapes :

— reconstruction projective, à partir d'images non-calibrées

— rectification euclidienne, par moyen d'informations supplémentaires

• L'étape projective donne déjà toute la structure 3D de la scène, à 9 paramètres euclidiennes près.

Motivation

• La géométrie 3D des caméras laisse sa trace dans les images

• Retrouver cette trace aide à

— la mise en correspondance des primitives

— la reconstruction projective

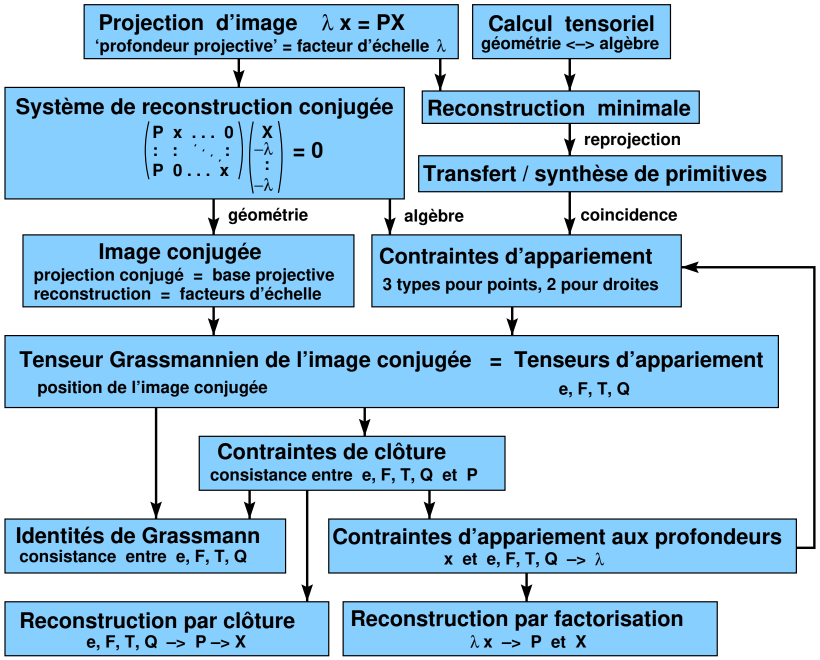
— la synthèse de nouvelles vues

• Au coeur du problème : les **tenseurs d'appariement**

— objets algébréo-géométriques multi-indices et multi-images

— ils caractérisent la géométrie 3D relative des caméras

— ils peuvent être estimés à partir des correspondances images



Dérivation des contraintes d'appariement

- Les equations de projection conjugées sont linéaires en x et λ :

$$\begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 & \boldsymbol{x}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{P}_m & 0 & \dots & \boldsymbol{x}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{x} \\ -\lambda_1 \\ \vdots \\ -\lambda_m \end{pmatrix} = 0$$

- Il y a une solution (x, λ), donc toute mineur (déterminante de sous-matrice maximale) doit être nulle. Développe et simplifie.
- On trouve des contraintes multi-linéaires en les points de 2,3,4 images, dont les coefficients sont des déterminants 4×4 de 4 lignes de P.
- Ces coefficients peuvent être rassemblées en **tenseurs** (tableaux multi-indices) inter-images.

L'image conjuguée

L'ensemble d'images d'une primitive 3D caractérisent la primitive, et donnent une représentation implicite d'elle.

- Rassembler dans un grand système $3m \times 4$, les équations de projection $\lambda_i \boldsymbol{x}_i = \mathsf{P}_i \mathsf{x}$ d'un point 3D dans m images :

$$\mathsf{X} = \mathsf{P}\,\mathsf{x} \qquad \text{où} \quad \mathsf{X} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \boldsymbol{x}_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{P} \equiv \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{P}_m \end{pmatrix}$$

- Un point 3D x est représenté par son **image conjuguée** X — l'ensemble $3m$-D de toutes ses coordonnées images homogènes.
- La géométrie 3D des caméras est représentée par leur **matrice de projection conjuguée** P.

Tenseurs d'appariement

- Tout déterminant 4×4 de 4 lignes de P donne une entrée d'un tenseur d'appariement.
- Il y a 4 types de tenseur, qui correspondent aux 4 façons de choisir les lignes en 2-4 images : 1+3, 2+2, 1+1+2, 1+1+1+1

$\boldsymbol{e}_{12}$	épipôle de caméra 1 en image 2
$\boldsymbol{F}_{12}$	matrice fondamentale
$\boldsymbol{T}_1{}^{23}$	tenseur trifocale
$\boldsymbol{Q}^{1234}$	tenseur quadrifocale

- Les tenseurs dépendent seulement de la *géométrie intrinsèque* 3D des caméras — les déterminants élimine la dépendance sur le repère 3D.

Contraintes d'appariement

- Les différentes images d'une primitive 3D doivent vérifier des contraintes de consistance entre eux.
- Pour les points 3D, il y a 3 types de ces **contraintes d'appariement**, *p.ex.*

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{F}_{12}\, \boldsymbol{x}_2 & = & 0 & \text{épipôlaire} \\ [\,\boldsymbol{x}_2\,]_\times \left(\boldsymbol{T}_1{}^{23} \cdot \boldsymbol{x}_1\right) [\,\boldsymbol{x}_3\,]_\times & = & \boldsymbol{0} & \text{trifocale} \end{array}$$

- Il y a aussi des contraintes analogues sur les droites 3D
- ***Applications :*** estimation de tenseurs, aide à la mise en correspondance et « transfert » des primitives entre images.

Contraintes de clôture

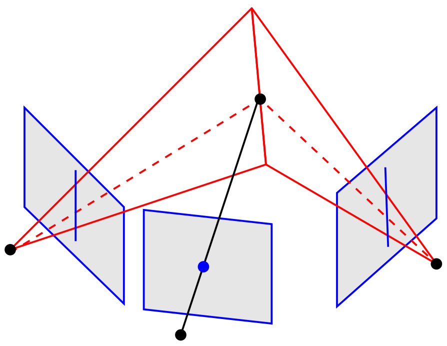
- Contraintes de consistance entre les matrices de projection, et les tenseurs d'appariement dérivés d'eux.
- Il y a 5 types, dont les deux les plus utiles :

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{F}_{ji}\, \mathsf{P}_i + [\,\boldsymbol{e}_{ij}\,]_\times\, \mathsf{P}_j & = & \boldsymbol{0} & \text{clôture } \boldsymbol{F}\text{-}\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{T}_{B_j}{}^{A_i C_k}\, \mathsf{P}_a^{B_j} + \boldsymbol{e}_j^{A_i}\, \mathsf{P}_a^{C_k} - \mathsf{P}_a^{A_i}\, \boldsymbol{e}_j^{C_k} & = & \boldsymbol{0} & \text{clôture } \boldsymbol{T}\text{-}\boldsymbol{e}^2 \end{array}$$

- Facteurs d'échelle consistantes pour $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{T}$ sont nécessaires.
- ***Dérivation :*** équivalent aux contraintes Grassmann qui disent que la matrice de projection conjuguée est une base de l'image conjuguée
- ***Applications :*** la reconstruction par clôture, les contraintes suivantes ...

Interprétation géométrique

- Les faisceaux de rayons optiques 3D reprojetés des primitives images doivent s'intersecter en une primitive cohérente 3D.
- Les différentes contraintes d'appariement correspondent aux différentes façons de formuler ceci algébriquement.



Contraintes d'appariement aux profondeurs

- Contraintes qui lient les primitives images *avec leurs profondeurs projectives correctes* aux tenseurs d'appariement.
- Il y a 5 types, parallèles aux contraintes de clôture, *p.ex.* :

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{F}_{ji}\, (\lambda_{ip}\, \boldsymbol{x}_{ip}) + \boldsymbol{e}_{ij} \wedge (\lambda_{jp}\, \boldsymbol{x}_{jp}) & = & \boldsymbol{0} & \text{épipôlaire} \\ \boldsymbol{T}_{B_j}{}^{A_i C_k}\, (\lambda_j\, \boldsymbol{x}^{B_j}) - (\lambda_i\, \boldsymbol{x}^{A_i})\, \boldsymbol{e}_j^{C_k} + \boldsymbol{e}_j^{A_i}\, (\lambda_k\, \boldsymbol{x}^{C_k}) & = & \boldsymbol{0} & \text{trifocal} \end{array}$$

- Les contraintes d'appariement standards suivent par multiplication par $\boldsymbol{x}$, $[\,\boldsymbol{x}\,]_\times$
- ***Application :*** retrouver les profondeurs pendant la reconstruction.
- ***Dérivation :*** projeter une primitive 3D avec les matrices de projection des contraintes de clôture.

Identités de Grassmann

- Contraintes de consistance quadratiques entre les tenseurs d'appariement, plus leurs conséquences cubiques, quartiques, ...
- 2 en 2 images, 15 en 3, ...
- Les plus simples sont :

$$
\begin{array}{rclcrcll}
\boldsymbol{F}_{12}\,\boldsymbol{e}_{12} &=& \boldsymbol{0} & & & & & \\
\mathrm{Cofactor}\,(\boldsymbol{F}_{12}) + 2\,\boldsymbol{e}_{21}\,\boldsymbol{e}_{12}^{\top} &=& \boldsymbol{0} & \qquad & \det\,(\boldsymbol{F}_{12}) &=& 0 & \\
\boldsymbol{F}_{32}\,\boldsymbol{e}_{12} - \boldsymbol{e}_{13} \wedge \boldsymbol{e}_{23} &=& \boldsymbol{0} & & \det\left(\boldsymbol{T}_1{}^{23} \cdot \boldsymbol{x}_1\right) &=& 0 & \forall \boldsymbol{x}_1 \\
\boldsymbol{T}_1{}^{23} \cdot \boldsymbol{e}_{21} + \boldsymbol{e}_{12}\,\boldsymbol{e}_{23}^{\top} &=& \boldsymbol{0} & & & & &
\end{array}
$$

- ***Dérivation :*** contraintes Grassmann-Plücker de l'image conjuguée.
- Même en 3 images elles sont trop nombreuses et trop complexes à manier facilement.

Autres travaux sur l'approche tensorielle

- Estimation optimale des tenseurs à partir des primitives images, sujet à leurs contraintes de consistance.
- Tenseurs et contraintes différentiels, pour le cas où les images sont proches les unes aux autres.

Perspectives sur l'approche tensorielle

- L'image conjuguée et l'approche systématique tensorielle ont beaucoup apporté.
- Les facteurs d'échelle sont souvent plus significatives qu'on ne le pense.
- Pour points et droites, la théorie de base semble plus ou moins complète.
- Depuis 3–4 images une représentation « grande ensemble de tenseurs » devient trop lourde — il vaut mieux expliciter les matrices de projection.

- Problème ouvert : les contraintes d'appariement entre les images d'une quadrique 3D, en ≥ 3 images (application à l'auto-calibrage)

Reconstruction Projective

Reconstruction projective par factorisation

• Regrouper les équations de projection conjuguées de n points 3D en m images :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11}\boldsymbol{x}_{11} & \cdots & \lambda_{1n}\boldsymbol{x}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1}\boldsymbol{x}_{m1} & \cdots & \lambda_{mn}\boldsymbol{x}_{mn} \end{pmatrix}_{3m\times n} = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{P}_m \end{pmatrix}_{3m\times 4} \begin{pmatrix} \mathsf{X}_1 & \cdots & \mathsf{X}_n \end{pmatrix}_{4\times n}$$

• La matrice $3m \times n$ des $(\lambda_{ip}\boldsymbol{x}_{ip})$ a pour rang seulement 4.

Retrouver les profondeurs projectives

• Les profondeurs projectives requises sont estimées depuis les contraintes d'appariement aux profondeurs, *p.ex.*

$$\boldsymbol{F}_{12}\,(\lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{e}_{21} \wedge (\lambda_1\boldsymbol{x}_1) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_2 \approx \lambda_1 \frac{(\boldsymbol{e}_{21} \wedge \boldsymbol{x}_1) \cdot (\boldsymbol{F}_{12}\,\boldsymbol{x}_2)}{\|\boldsymbol{e}_{21} \wedge \boldsymbol{x}_1\|^2}$$

• Les tenseurs $\boldsymbol{F}_{ij}$ et $\boldsymbol{e}_{ij}$ sont extraites des correspondances images.

• On propage les λ depuis une première image, dans un réseau d'images liées par les $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{e}$.

Factorisation

• On peut décomposer une telle matrice dans deux facteurs de la même forme par, *p.ex.* SVD (Décomposition par Valeurs Singulières)

• Toute factorisation de ce type est une *reconstruction projective de la scène et des caméras* — l'ambiguïté est celle d'une changement de repère 3D projectif.

• La factorisation concrétise une reconstruction qui était déjà implicite dans les points renormalisés $(\lambda\,\boldsymbol{x})$.

• En plus, elle moyenne de façon efficace le bruit dans les points images mesurés.

L'algorithme

1. Extraire et mettre en correspondance les points dans toutes les images
2. Normaliser les coordonnées images (pour augmenter la stabilité)
3. Estimer un réseau de matrices fondamentales qui relie tous les images.
4. Estimer les profondeurs projectives par les équations de profondeur.
5. Pour stabilité, équilibrer la matrice des points renormalisés $(\lambda\,\boldsymbol{x})$
6. Factoriser la matrice par SVD (ou autres méthodes ...)
7. Extraire la structure et les matrices de projection 3D

• On peut aussi reconstruire les droites 3D par moyen d'une paramétrisation « 2 points ».

Reconstruction par « clôture »

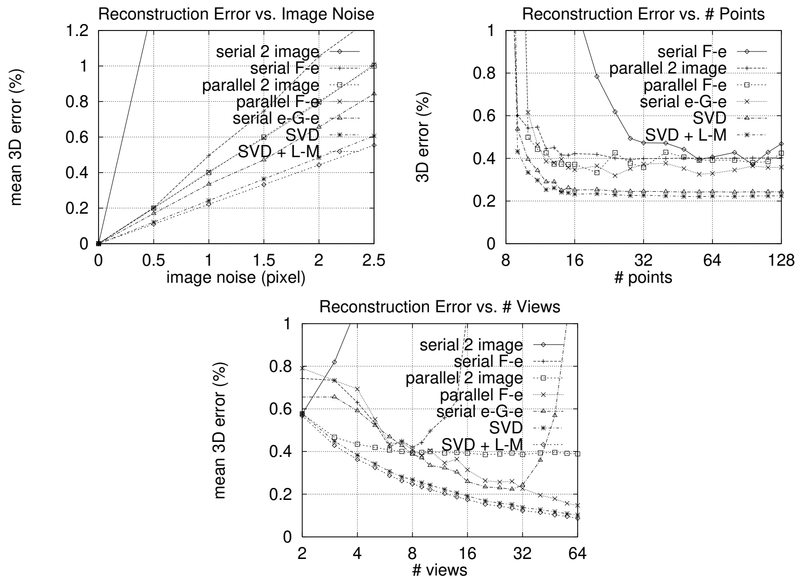
• La factorisation exige que tous les points soient visibles dans toutes les images — ce qui est souvent difficile en pratique.

• Avec les ***contraintes de clôture***, on peut estimer les matrices de projection directement des tenseurs d'appariement

• Par exemple, la contrainte de clôture $\boldsymbol{F}$–$\boldsymbol{e}$ donne deux contraintes linéaires entre chaque paire d'images :

$$\boldsymbol{F}_{ij}\,\mathsf{P}_j + [\boldsymbol{e}_{ji}]_\times\,\mathsf{P}_i \;=\; \boldsymbol{0}$$

Résultats expérimentaux



Algorithme

$\boxed{1}$ Estimer un réseau de matrices fondamentales qui lie les images entre eux (chaque image lié à au moins deux autres).

$\boxed{2}$ Empiler les contraintes sur la matrice de projection conjuguée (les P_i) :

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{F}_{ij}^\top & \cdots & [\boldsymbol{e}_{ij}]_\times & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathsf{P}_i \\ \vdots \\ \mathsf{P}_j \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

$\boxed{3}$ Estimer l'espace nulle. Toute base linéaire de cet espace donne une reconstruction des P_i, à une projectivité 3D près.

$\boxed{4}$ Reconstruire la structure 3D à partir des P_i par résection linéaire.

Bilan sur la reconstruction

• La méthode par factorisation est très stable et à recommander, sauf qu'elle ne tolère pas des données manquantes, ce qui est gênant en pratique

• La méthode de clôture est moins stable, mais toujours mieux que de utiliser deux images seules.

Auto-calibrage d'une caméra en mouvement

Structures euclidiennes en espace projectif

- Sous les déformations projectives 3D :

— Les points infiniment distants (*vecteurs de direction*) peuvent devenir finis, donc ne peuvent pas être distingués des points finis.

— Les directions orthogonaux peuvent devenir non-orthogonaux.

- Pour convertir une reconstruction projective dans une reconstruction euclidienne, il faut « localiser » :

1 Le ***plan à l'infini*** — le sphère de rayon infini qui contient tous les points de fuite.

2 L'orthogonale : une ***base de directions orthogonales***, la ***conique absolue*** ou la ***quadrique absolue duale***.

La quadrique absolue duale

- Une paramétrisation simple et projective de la structure euclidienne.
- Dans un repère euclidien, la **quadrique absolue duale** est la matrice

$$\boxed{\Omega \;=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times 3} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}}$$

- Elle est invariant par transformations euclidiennes :

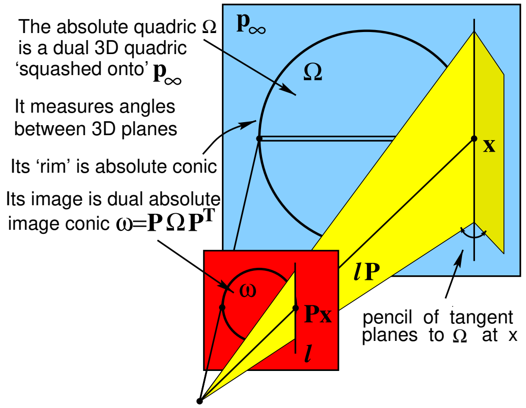
$$\boxed{\mathsf{T}\,\Omega\,\mathsf{T}^\top \;=\; \Omega \qquad \text{où} \qquad \mathsf{T} \;=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}}$$

- Elle donne le produit scalaire entre les normaux des plans :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_1^\top & d_1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \;=\; \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}$$

- Sa unique vecteur nulle est le plan à l'infini $(\boldsymbol{0}\ 1)$.

- Sous une transformation projective, la quadrique absolue duale devient une matrice 4×4 rang 3 symétrique arbitraire.
- Interprétation géométrique : elle est une quadrique 3D complexe (pas de points réels), et qui a dégénérée sur une disque dans le plan à l'infini.



Bases de directions orthogonales

- Une **base de directions orthogonales** est une matrice 4×3, dont les 3 colonnes donnent 3 directions orthogonales.
- Dans un repère euclidien, $\mathsf{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$, où $\boldsymbol{R}$ est une rotation 3×3.
- Le lien avec la quadrique duale absolue :

$$\boxed{\Omega = \mathsf{D}\,\mathsf{D}^\top}$$

Algorithme d'auto-calibrage

1. Reconstruction projective pour retrouver les matrices de projection P_i dans un repère projectif inconnu.
2. Minimisation non-linéaire contrainte de l'erreur résiduelle de $\omega \simeq \mathsf{P}_i\,\Omega\,\mathsf{P}_i$

- Les variables sont ω (calibrage de la caméra) et Ω (la structure euclidienne de la scène).
- Une initialisation aléatoire ou défaute suffit.
- La contrainte est $\det(\Omega) = 0$ (car Ω est de rang 3).
- La méthode numérique est la programmation quadratique séquentielle SQP.

3. Extraire la matrice de calibrage $\boldsymbol{K}$ et la structure euclidienne de ω et Ω.

- Au moins 3 images avec rotations générales sont nécessaires.
- En générale la méthode donne de très bons résultats.

Contrainte de base de l'auto-calibrage

La projection calibrée d'une base de directions est orthogonale

$$\boldsymbol{K}^{-1}\,\mathsf{P}\,\mathsf{D} \simeq \textbf{rotation } 3{\times}3$$

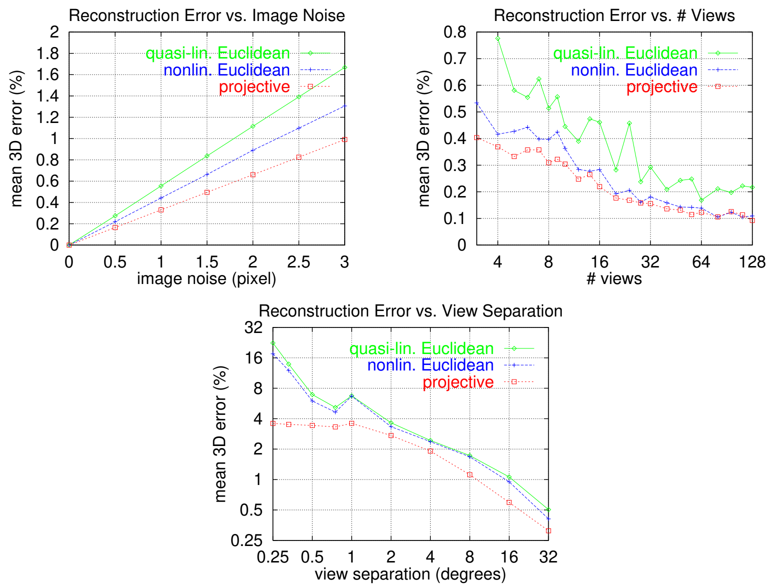
$\boldsymbol{K}$ = matrice 3×3 de calibrage interne de la caméra
P = matrice 3×4 de projection
D = matrice 4×3 de base des directions

- Ceci implique la **contrainte de projection de la quadrique duale absolue**

$$\boxed{\omega \simeq \mathsf{P}_i\,\Omega\,\mathsf{P}_i \qquad \text{où} \qquad \omega \equiv \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\top}$$

- Si la calibrage interne $\boldsymbol{K}$ de la caméra est inconnue mais constante, $\omega = \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\top$ est aussi constante.
- D'autres informations sur $\boldsymbol{K}$ peuvent aussi être intégrées.

Expériences



Méthode plane

- Contrainte : les 2 directions orthogonales dans le plan 3D doivent être projetées aux directions orthogonales dans les images calibrées.
- Formulation algébrique :

— Le plan 3D est représenté par une de ses images (disons 1).

— Les directions orthogonales sont représentées par deux points inconnus $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ dans le plan.

— Les autres images du plan sont représentées par les homographies $\boldsymbol{H}_{i1}$

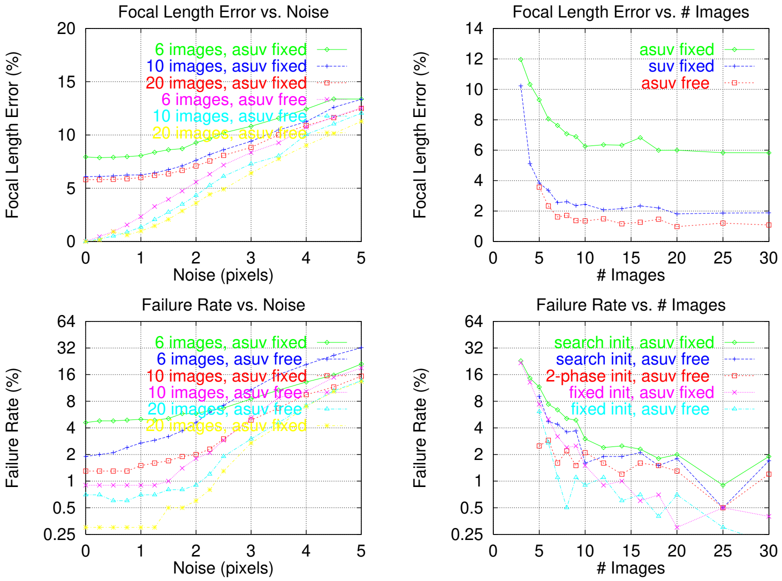
— La contrainte devient :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_i\|^2 &= \|\boldsymbol{v}_i\|^2 \\ \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i &= 0 \end{aligned} \qquad \text{où} \qquad (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) \equiv \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{H}_{i1} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

- On estime $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{K}$ à partir des $\boldsymbol{H}_{i1}$, par optimisation non-linéaire.
- Au moins 5 images sont nécessaires pour une $\boldsymbol{K}$ générale.

Bilan des contributions

Expériences



L'approche tensorielle à la vision projective

- L'image conjuguée, et le lien entre les coordonnées Grassmann-Plücker de l'image conjuguée et les tenseurs d'appariement.
- Les contraintes de clôture, d'appariement aux profondeurs, et de consistance inter-tenseur, et les applications qu'elles donnent.
- Estimation optimale des tenseurs sous contraintes de consistance.
- Contraintes d'appariement différentielles.

Méthodes de reconstruction projective

- Méthode de factorisation, basée sur les contraintes d'appariement aux profondeurs (avec P. Sturm).
- Méthode de « clôture ».

Auto-calibrage

- La quadrique duale absolue et le lien avec les repères de direction.
- Les méthodes quasi-linéaire et SQP, d'auto-calibrage à partir d'une reconstruction projective.
- La méthode d'auto-calibrage des scènes planes, à partir de homographies.